



TITLE:

円筒ジェットのカプセル化現象に 及ぼす粘性の影響 (非線形波動現象 の数理と応用)

AUTHOR(S):

吉永, 隆夫; 菅, 健太郎

CITATION:

吉永, 隆夫 ...[et al]. 円筒ジェットのカプセル化現象に及ぼす粘性の影響
(非線形波動現象の数理と応用). 数理解析研究所講究録 2008, 1594: 66-
76

ISSUE DATE:

2008-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/81678>

RIGHT:

円筒ジェットのカプセル化現象に及ぼす 粘性の影響

阪大 基礎工

吉永隆夫 (Takao Yoshinaga), 菅健太郎 (Kentaro Kan)

Dept. Mechanical Science, Osaka Univ.

1 はじめに

円筒液体ジェットの安定性の問題は微粒化, 噴霧化, カプセル化技術などの工業的な応用において重要である [1, 2]. すでに線形理論により, スワール (回転流) や周囲流体の影響のない場合, ジェットは軸対称攪乱 (対称, 反対称モード) に対してのみ不安定になるが, そうでなければ方位角方向の攪乱に対しても不安定になることなどが知られている [3, 4, 5]. 特に, この不安定性により最終的にはシート部によるコア部のカプセル化が引き起こされることが比較的大きな径 (ミリからマイクロオーダー) のジェットに対して実験により示されているが [6, 7], 現在のところ応用上重要な微小カプセル (ナノからマイクロオーダー) の形成には至っていない. そのため解析的な研究は, そのような領域での実用化に向けて, ノズル設計や各種パラメータの設定などにおいて役立つことが予想されるが, 現象が大変形する自由界面を伴う運動であるため非線形性を考慮した解析を行う必要がある.

これまで, 周期境界条件の下で Navier-Stokes 方程式を直接数値解析することにより, 円筒シート部が閉じてカプセル化する様子が調べられている [8]. しかしながら, 計算精度や計算時間の問題から現実の現象により近い空間周期性を仮定しない時空間発展は明らかにされていようである. これに対して, ジェット半径やシート厚みに対して十分長波長の変形を仮定した '長波近似' を用いて比較的簡単な非線形方程式の導出もおこなわれている. その方程式を数値的に解くことにより, 円筒シート部が破断したりカプセル化することがこれまで示されてきた [9, 10, 11, 12, 13].

最近, このような現象に対して液体粘性の影響が調べられ, 破断やカプセル化近傍で粘性の影響が大きく現れることが示されている [14]. 特に, カプセル化に関しては, 実際使用するカプセル材料として高分子溶液などを用いることが考えられるため, 従来の解析で仮定されているニュートン粘性では不十分である. そこで本研究では, 軸対称を仮定したモデルで長波近似を用いてた解析をおこない, 非ニュートン粘性の影響が崩壊やカプセル化に及ぼす影響を調べる.

2 定式化

2.1 非ニュートン粘性

図1に示すような (z, r) 軸対称系における円筒ジェットを考える。ここで、流速 (u, v) 及び圧力 p は r, z, t の関数であり、外と内界面 $r = r_{\pm}$ は z, t の関数で、シート中心面と厚みを $R = (r_+ + r_-)/2$ 及び $b = (r_+ - r_-)$ で与える。界面 $r = r_{\pm}$ での圧力を p_{\pm} とし流体密度を一定 ρ とする。一方、 $r > r_+$ 及び $r < r_-$ では (少なくとも空間的に) 一定圧力 $p = p_{0\pm}$ のみが作用しているものとし、周囲流体の密度を無視しその運動は考えない。このとき、一定主流速度 $u = \bar{u}, v = 0$ で中心面半径及び厚みが \bar{R}, \bar{b} の一様形状のジェットに対して、界面張力係数を σ とするとき $p_{0+} - p_{0-} = -2\sigma\bar{R}/(\bar{R}^2 - \bar{b}^2/4)$ と表すことができるので、常に $p_{0+} < p_{0-}$ であることがわかる。

一方、一般化されたニュートン粘性は Carreau モデル [15, 16]

$$\mu = \mu_0 [1 + (\alpha \dot{\gamma})^2]^{(n-1)/2}, \quad (1)$$

で与えられるとする ($\alpha > 0, 0 < n < 2$)。このモデルではひずみ速度による粘性の変化は図2のように与えられるので、 $0 < n < 1$ で擬塑性流体、 $n = 1$ でニュートン流体、 $n > 1$ でダイラタント流体の性質を示す。また、ひずみ速度 $\dot{\gamma}$ は (u, v) を用いて以下のように表される：

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2 \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{v}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2}. \quad (2)$$

2.2 長波近似

基礎方程式は $r_- < r < r_+$ で連続の式、ナヴィエーストークス方程式を用い、 $r = r_{\pm}$ で運動学的境界条件及び力学的境界条件（接線、法線方向）を課す。従属変数 u, v, p がシー

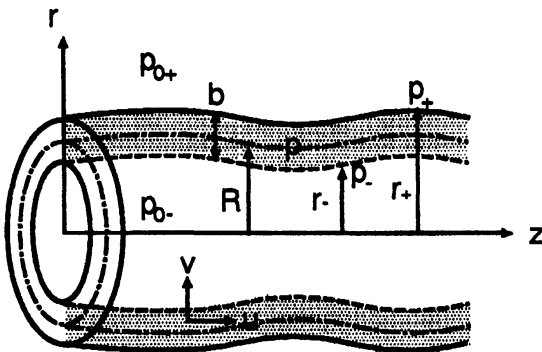


図 1: 円筒ジェット

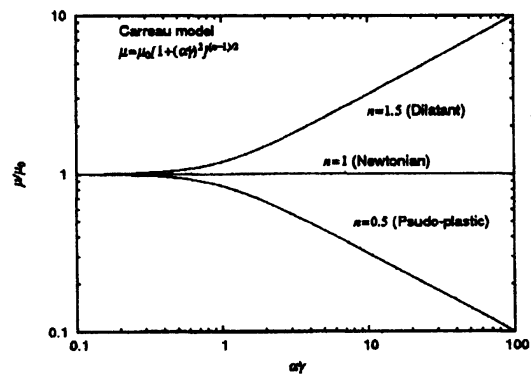


図 2: Carreau モデル

ト厚みの冪で展開できるとすると仮定して以下のような長波近似を導入する：

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_1(r-R) + u_2(r-R)^2 + \dots, \\ v &= v_0 + v_1(r-R) + v_2(r-R)^2 + \dots, \\ p &= p_0 + p_1(r-R) + p_2(r-R)^2 + \dots. \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $|r-R| \leq b/2$ かつ u_j, v_j, p_j ($j = 0, 1, 2, \dots$) は z, t の関数である。上式を基礎方程式および境界条件に用いて、 $(r-R)$ の冪で整理して、厚み b の二乗以上の項を無視することにより以下の無次元形で表された非線形発展方程式を得る：

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -u_0 \frac{\partial b}{\partial z} - b \frac{\partial u_0}{\partial z} - v_0 \frac{b}{R}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = v_0 - u_0 \frac{\partial R}{\partial z}, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial t} &= -u_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial(p_{0+} + p_{0-})}{\partial z} + \frac{p_{0+} - p_{0-}}{b} \frac{\partial R}{\partial z} \\ &\quad - \frac{1}{\text{We}} \left[\frac{\partial p_{0\sigma}}{\partial z} - p_{1\sigma} \frac{\partial R}{\partial z} \right] \\ &\quad + \frac{1}{\text{Re}} [1 + (\alpha \dot{\gamma})]^{(n-1)/2} \left[p_{1\mu} \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial p_{0\mu}}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} + 2u_2 \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial u_1}{\partial z} + u_1 \left(\frac{1}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) + 2u_2 \left(\frac{\partial R^2}{\partial z} \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{\text{Re}} (n-1) (\alpha^2 \dot{\gamma}) [1 + (\alpha \dot{\gamma})^2]^{(n-3)/2} \left[\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial r} \left(\frac{\partial v_0}{\partial z} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - v_1 \frac{\partial R}{\partial z} + u_1 \right) + 2 \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial z} \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} - u_1 \frac{\partial R}{\partial z} \right) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

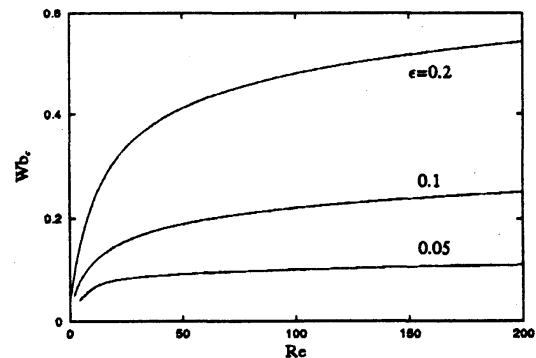
$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0}{\partial t} &= -u_0 \frac{\partial v_0}{\partial z} - \frac{p_{0+} - p_{0-}}{b} - \frac{p_{1\sigma}}{\text{We}} \\ &\quad + \frac{1}{\text{Re}} [1 + (\alpha \dot{\gamma})]^{(n-1)/2} \left[-p_{1\mu} - \frac{v_0}{R^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} + 2v_2 \right. \\ &\quad \left. - 2 \frac{\partial R}{\partial z} \frac{\partial v_1}{\partial z} + v_1 \left(\frac{1}{R} - \frac{\partial^2 R}{\partial z^2} \right) + 2v_2 \left(\frac{\partial R}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{\text{Re}} (n-1) (\alpha^2 \dot{\gamma}) [1 + (\alpha \dot{\gamma})^2]^{(n-3)/2} \left[2v_1 \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial r} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial z} \left(\frac{\partial v_0}{\partial z} - v_1 \frac{\partial R}{\partial z} + u_1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 $u_1, u_2, v_1, v_2, p_{0\sigma}, p_{0\mu}, p_{1\sigma}, p_{1\mu}$ は u_0, v_0, R, b の関数であり、代表長さ \bar{R} 、代表速度 U 及を用いて無次元パラメータ $\text{Wb} = \rho \bar{R} U^2 / \sigma$, $\text{Re} = \rho \bar{R} U / \mu_0$, $\text{Oh} = \sqrt{\text{Wb}} / \text{Re}$, $\epsilon = \bar{b} / \bar{R}$ が導入されている。また、上式で $n = 1$ (ニュートン粘性) とおくとこれまでに得られているニュートン粘性の場合に帰着する [14]。以下では、ジェットの時間発展及び時空間発展を考えるが、時間発展では表面張力波の速度を代表速度 $U = \sqrt{2\sigma/\rho b}$ と選ぶことにより

無次元パラメータが ϵ と Oh 数になるのに対し、時空間発展ではジェット的主流速度を代表速度 $U = \bar{u}$ に選ぶため、 ϵ , Re 数, Wb 数が無次元パラメータとして現れる。いずれにしても、問題は式(4)~(7)を適当な初期値/境界値に対して解くことに帰着される。

3 線形安定性

前節で得られた非線形方程式の平衡状態 ($u = U, v = 0, R = \bar{R}, b = \bar{b}$) 近傍で、波数 k , 角周波数 ω の正弦攪乱 $\exp[i(kz - \omega t)]$ の安定性を考える。このとき非ニュートン粘性の影響は非線形項においてのみ現れるので、線形安定性は従来の知られている結果に帰着する [14, 17, 18, 19]。すなわち、実波数 $k = k_r$ と複素角周波数 $\omega = \omega_r + i\omega_i$ を仮定した時間安定性では、反対称・対称両モードともに Oh 数の増加とともに最大増幅率 ω_i は減少するが、常に反対称モードが対称モードより大きい。一方、複素波数 $k = k_r + ik_i$, 実角周波数 $\omega = \omega_r$ を仮定した空間安定性では、両モードは Re が増加するか、もしくは Wb が減少すると最大増幅率 $-k_r$ は増加する。さらに、反対称モードは常に対流不安定で、ある Wb 以下ではそのモード自体が消滅してしまうが、対称モードは Wb が臨界値 Wb_c より小さくなると対流不安定から絶対不安定に変わる [20]。図 3 は、厚み比 ϵ に対して Re と Wb_c の関係を示しており、 ϵ と Re が大きいほど Wb_c は大きくなることがわかる。また、絶対不安定での様子をさらに詳しく見るために、図 4 に複素 k 平面における鞍部点特異性 (saddle-point singularity) を (a) $Re = \infty$ と (b) $Re = 10$ の場合について示している。両者とも特異点付近で正負の群速度 $d\omega_r/dk_r$ を持ち攪乱は両方向に向かって増大する。



4 数値計算結果

方程式(4)から(7)の時間発展および時空間発展を数値的に調べる。計算では空間微分を有限差分法で時間微分はルンゲークッタ法を用いている。計算精度はシート部及び中空部体積が1%相対誤差範囲内で精度を保つように時間、空間刻みを設定している。さらに時間発展に関する計算では、中空部圧力 p_{0-} が時間的にのみ変動することを許している。

図 3: $\epsilon = 0.05, 0.1, 0.2$ のときの Wb_c と Re の関係

4.1 時間発展

初期条件として線形不安定領域 ($k \lesssim 1$) で $R = 1 + \alpha \cos kz$ と線形解を用い、 $\alpha = 0.1$, $k = 0.5$, $\epsilon = 0.1$ とした場合のジェットの空間周期的なカプセル形状 ($R \pm b/2$) 及び時間

(t_b)を示す。図5はニュートン粘性($n=1$)の場合であり、異なる Oh 数に対する形状の違いを示している。図6では、非ニュートン性の影響を調べるため、 $Oh=1$ の場合、異なる n に対する形状及び時間を示す。両図の比較から、Oh の増加と n の増加に対して同様な傾向を示すことがわかる。このことは、図7(a), (b), (c) に示すように、各 Oh に対する t_b , R_{max} , b_{max} と n の関係からもわかるが、 n が2付近での R_{max} と b_{max} は n が2より小さな領域での傾向とは異なる。さらに、図(d), (e) からわかるように、 b_{min} は $n \sim 1$ 付近で最小値を取り、また R_{max} は $n > 1$ で最大値をとる Oh が減少して1に近づく。

次に、線形安定領域 ($k \gtrsim 1$) で厚み攪乱 $b = \epsilon + \alpha \cos kz$ と線形解を初期値として、 $\alpha = 0.1$, $\epsilon = 0.1$, $k = 1.5$ と選んだ場合を示す。図8は $Oh = 0$ (非粘性) の場合のシート断面の時間発展を示しているが、非線形性により最終的にはシートが破断していることがわかる。

しかし、このような破断はわずかの粘性によっても抑えられ、十分大きな攪乱振幅を与えないと破断が現れないような Oh 数が存在する。図9(a)は $n=1$ (ニュートン粘性) の場合、初期厚み攪乱 $b = \epsilon(1 + \eta_c \cos kx)$ とした時に ($\eta_c = \alpha/\epsilon$)、種々の Oh に対してシートが破断する最小の η_c を示している。図よりわかるように、ある臨界 Oh を超えると η_c が急に大きくジャンプするためシートは急激に破断しにくくなる。このような Oh は ϵ が大きくなるにつれて大きくなることから、薄いシートほどわずかの粘性でも急激に破断しにくくなるといえる。さらに、図(b)では、このような臨界 Oh は n が増加するにつれて減少することが示されている。

4.2 時空間発展

$z=0, t \geq 0$ で R と v にそれぞれ $-\alpha \sin \omega t$ と $-\omega \alpha \cos \omega t$ の攪乱を初期値境界値として加えたとき、 $\alpha = \pm 0.1$, $\omega = 0.5$, $\epsilon = 0.1$ とした場合のジェットの時空間発展を調べる。計算は $0 \leq z \leq 150$ の領域でおこない、攪乱が $z = 150$ に到達すると打ち切る。まず、以下では $\alpha = 0.1$ の場合について述べる。図10は $n=1$, $Wb = 100$ の場合、異なる Re に対するジェットの円筒シートの閉じることによる崩壊形状を示す。 Re が減少すると崩壊までの距離と時間は増加するが、 Re が十分小さくなると崩壊自体がおこらなくなることがわかる。なお、実際にはこの後カプセルかがおこることが実験的に示されている [6, 7]。さらに、非ニュートン性の影響を見るため、 $Re = 10$, $Wb = 100$ の場合、異なる n に対する崩壊形状を図11に示す。形状は n が大きくなるにつれて粘性が増加した場合と似ているが、崩壊距離に関してはほとんど n の大きさによらないことがわかる。さらに、 n に対する崩壊時間と形状の変化を図12に示す。 b_{max} 以外は有限の n (~ 1.3) に対して最大値または最小値をとり、 n に関する単調関数ではないことがわかる。線形安定性により Wb の小さい場合絶対不安定になることが示されているが、 $Wb = 0.1$ の場合二つの異なる Re に対して非線形発展がどのように異なるかを図13に示す。崩壊時間に差はあるものの Re にかかわらず攪乱はノズル付近で閉じて崩壊していることがわかる。

最後に $\alpha = -0.1$ の場合を考える。 $n=1$ のとき、異なる Re , Wb に対するジェット形状を図14に示す。図よりわかるように、 Wb の値にかかわらず、いずれの場合もジェットは

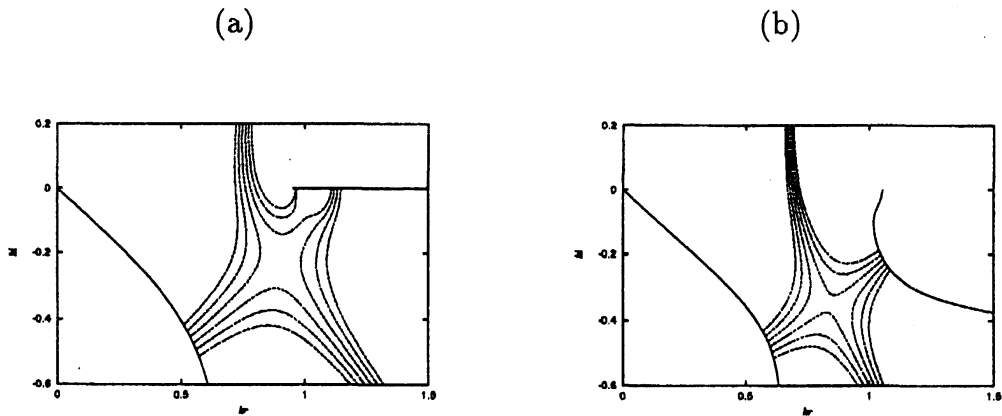


図 4: $Wb = 0.1$, $\epsilon = 0.1$ のときの複素 k 平面における準対称モードの鞍部点特異性, ここで, 破線は異なる ω_r の値に対する k を, 実線は $\omega_i = 0$ に対する k を示す; (a) $\text{Re} = \infty$, (b) $\text{Re} = 10$.

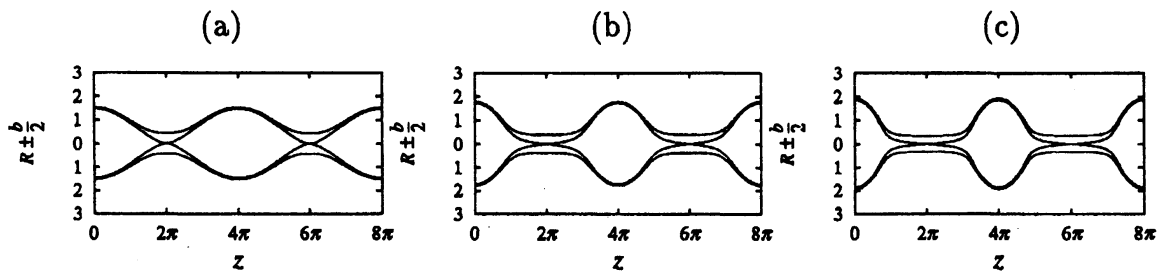


図 5: 異なる Oh に対するカプセル形状と時間 ($n = 1$); (a) $Oh = 0$, $t_b = 2.1304$, (b) $Oh = 1$, $t_b = 4.9396$, (c) $Oh = 2$, $t_b = 8.2324$.

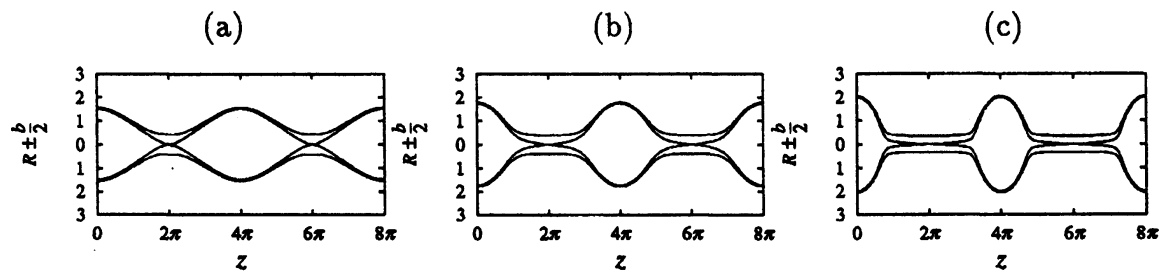


図 6: 異なる n に対するカプセル形状と時間 ($Oh = 1$); (a) $n = 0.2$, $t_b = 3.2248$, (b) $n = 1.0$, $t_b = 4.9396$, (c) $n = 1.8$, $t_b = 6.5692$.

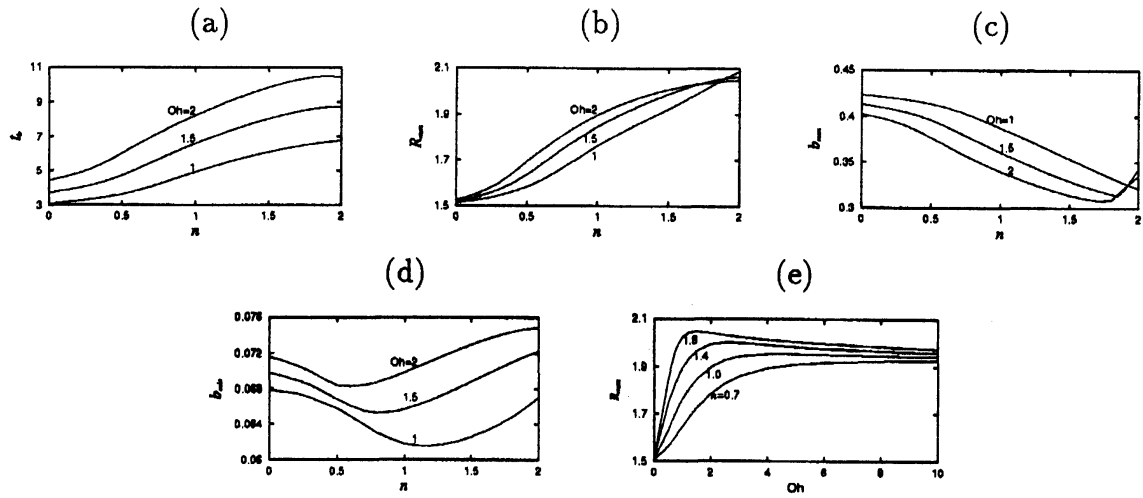


図 7: $Oh = 1, 1.5, 2$ および $0 < n < 2$ におけるカプセル化時刻と形状の特徴: (a) t_b , (b) R_{max} , (c) b_{max} , (d) b_{min} .

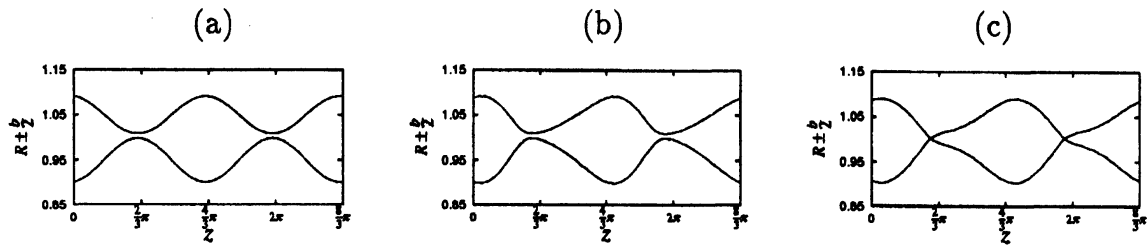


図 8: 線形安定領域でのシート破断の様子 ($Oh = 0$); (a) $t = 0$, (b) $t = 3$, (c) $t = 5.6672$.

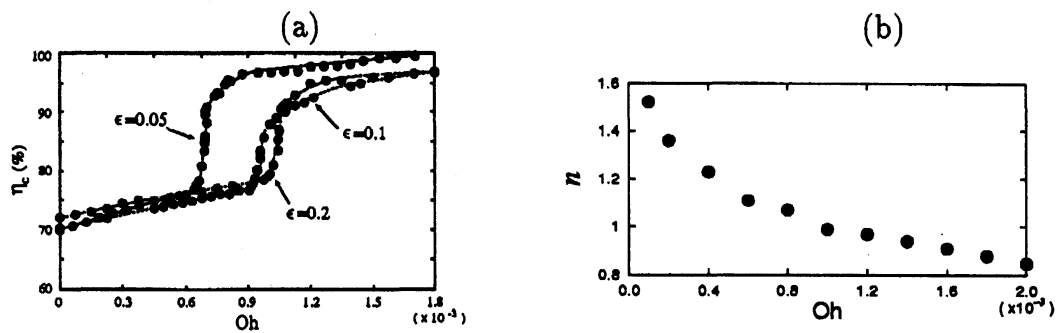


図 9: 攪乱振幅とシート破断が現れる Oh ; (a) $n = 1$ での Oh に対する η_c の変化, (b) n に対する臨界 Oh の変化.

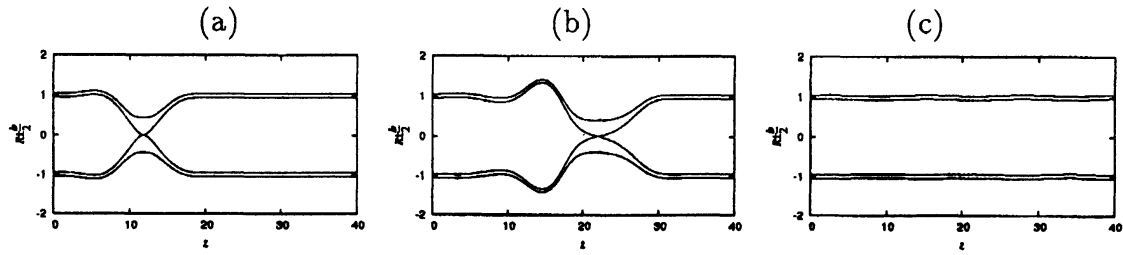


図 10: 異なる Re に対するジェットの開閉することによる崩壊 ($n = 1$, $Wb = 100$); (a) $Re = \infty$, $t_b = 13.1$, (b) $Re = 10$, $t_b = 23.5$, (c) $Re = 0.2$, $t_b = \infty$

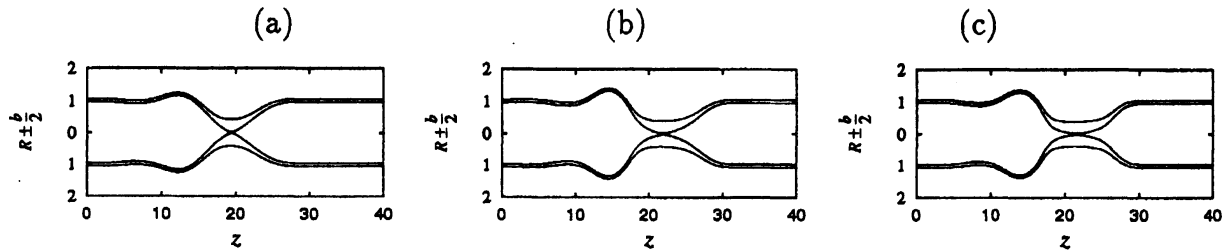


図 11: 異なる n に対するジェットの崩壊形状 ($Re = 10$, $Wb = 100$); (a) $n = 0.2$, $t_b = 21.0$, (b) $n = 1.0$, $t_b = 23.5$, (c) $n = 1.8$, $t_b = 22.965$

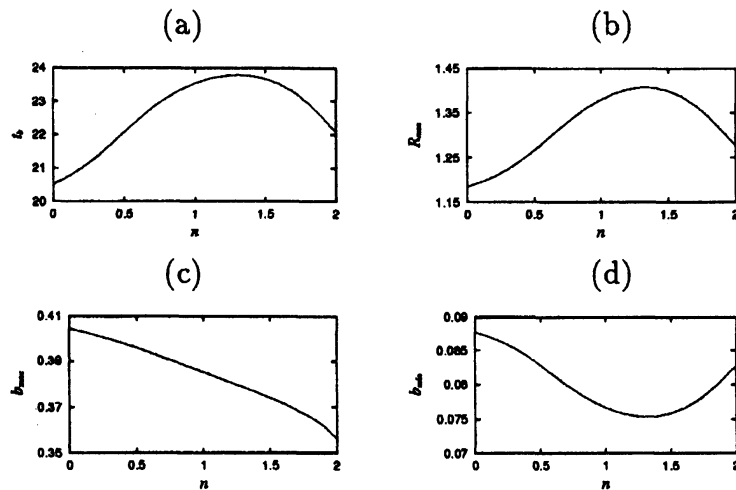


図 12: $Wb = 100$, $Re = 10$ の時の n に対する崩壊時間及び形状の変化; (a) t_b , (b) R_{max} , (c) b_{max} , (d) b_{min}

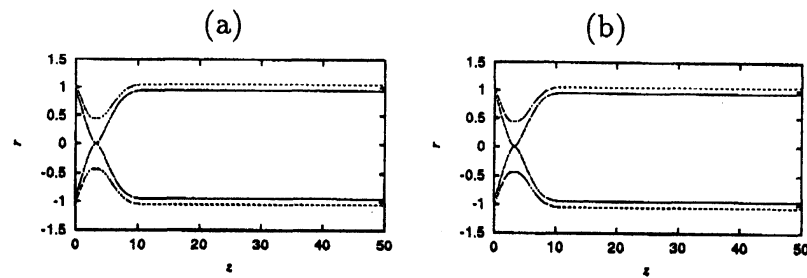


図 13: 絶対不安定領域 ($Wb=0.1$) でのジェット崩壊形状; (a) $Re = \infty$, $t_b = 0.8$, (b) $Re = 0.2$, $t_b = 1.7$.

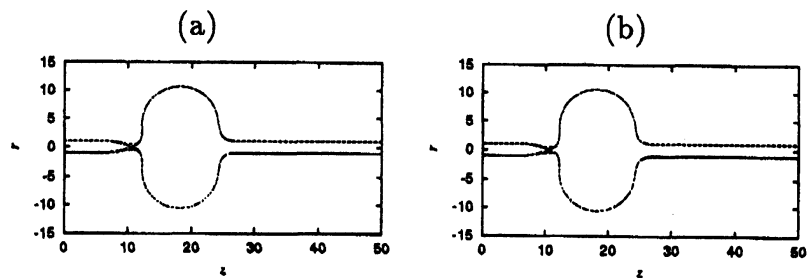


図 14: バルーニングによる破断 ($\alpha = -0.1$); (a) $Re = \infty$, $Wb = 100$ ($t_b = 13.1$), (b) $Re = 0.2$, $Wb = 0.1$ ($t_b = 1.5$)

バルーニングをおこしていることがわかる。実験的ではその後カプセル化されるが、解析では内部流体の運動を考慮していないため、一旦バルーニングをおこすと、時間とともに \bar{R} は大きくなり \bar{b} は小さくなり、最終的には破断する。

5 まとめ

以上得られた結果をまとめて以下に示す：

1. 長波近似の下で導出した粘性円筒ジェットの発展方程式において、Carreau モデルによる非ニュートン粘性の影響は非線形項に現れる。
2. 長波領域での対称・反対称モードは時間的、空間的に線形不安定であるが、空間安定性に関しては反対称モードが常に対流不安定であるのに対して、対称モードでは Wb が Wb_c より小さくなると対流不安定から絶対不安定に移行する。
3. 時間発展 (空間周期的) に関する数値結果から、ニュートン流体 ($n = 1$) の場合は Oh 数が増加するとジェットのカプセル化 (崩壊) までの時間が増加しカプセルは半径方向に伸び軸方向に縮む。この傾向は Oh を一定にして、 $n < 1$ から $n > 1$ に変化した場合と傾向は一致するが、カプセルの最大、最小厚みは $1 < n < 2$ で極値を取り、最大径は $n > 1$ では Oh は小さくなり、1 に近づく。

4. $z = 0$, $t \geq 0$ で与えられた攪乱の時空間発展の数値結果から, 非ニュートン性の影響は時間発展の場合と同様であるが, カプセル化 (崩壊) までの時間, 最大半径, 厚みに関しては $1 < n < 2$ で極値を持つ.
5. 粘性の大きさにかかわらず, 十分小さな Wb に対して, ジェットはノズル出口付近で急激に不安定化することから, 絶対不安定は非線形でもおこる.
6. 崩壊及びカプセル化には $z = 0$ での条件が大きく作用する. すなわち, α が正のときジェットは閉じて崩壊するのに対して, α が負なら大きく風船のように膨らむバルーニングが発生しジェットは破断する. いずれの場合にも実際は閉じと後やバルーニングを経てカプセル化がおこることが予想される.

参考文献

- [1] Lefebvre, A.H., *Atomization and sprays* (Hemisphere, New York, 1989).
- [2] Lin, S. P., *Breakup of liquid sheets and jets* (Cambridge, 2003) pp.172-200.
- [3] Ponstein, J., "Instability of rotating cylindrical jets," *Apl. Sci. Res.* **A8**, 425 (1959).
- [4] Crapper, G. D., Dombrowski, N and Pyott, G.A.D., "Kelvin-Helmholtz wave growth on cylindrical sheets," *J.Fluid Mech* **68**, 497 (1975).
- [5] Panchagnula, M. V., Sojka, P. E. and Santangelo, J., "On the three-dimensional instability of a swirling, annular, inviscid liquid sheet subject to unequal gas velocity," *Phys. Fluids* **8**, 3300 (1996).
- [6] Hertz, C. H. and Hermanrud, B., "A liquid compound jet," *J.Fluid Mech* **131**, 271 (1983).
- [7] Kendall, J. M., "Experiments on annular liquid jet instability and on the formation of liquid shells," *Phys. Fluids*, **29**, 2086 (1986).
- [8] Tchavdarov, B.M., Minev, P.D. and Radev, S.P., "Numerical analysis of compound jet disintegration," *Comput. Methods Appl.Mech.Engrg.* **118**, 121 (1994).
- [9] Lee, C. P. and Wang, T. G., "A theoretical model for the annular jet instability," *Phys. Fluids* **29**, 2076 (1986).
- [10] Mehring, C. and Sirignano, W. A., "Axisymmetric capillary waves on thin annular liquid sheets. I. Temporal stability," *Phys. Fluids* **12**, 1417 (2000).
- [11] Mehring, C. and Sirignano, W. A., "Axisymmetric capillary waves on thin annular liquid sheets. II. Spatial development," *Phys. Fluids* **12**, 1440 (2000).

- [12] Yoshinaga, T. and Kotani, K., "Modified membrane approximation on a thin liquid sheet," *J. Phys. Soc. Japan*, **70**, 372 (2001).
- [13] Yoshinaga, T. and Kotani, K., "Nonlinear behavior of an annular liquid sheet," in *Proceedings 16th International Symposium in Nonlinear Acoustics, Moscow*, edited by Rudenko, O. V. and Sapozhnikov, O. A. , pp. 207-210.
- [14] T.Yoshinaga, K.Kan and K.Mitomi,"Nonlinear behavior of an annular viscous liquid sheet," (*Trends in Applications of Mathematics to Mechanics*, Eds.Y.Wang and K.Hutter) Shaker Verlag (2005) 627-636.
- [15] P.Doshi, R.Suryo, O.E.Yildirim, G.H.McKinley and O.A.Basaran, "Scaling in pinch-off of generalized Newtonian fluids" *J. Non-Newton. Fluid Mech.* **113** (2003) 1-27, での引用文献参照.
- [16] P.J.Carreau, D.D.Kee and M.Daroux, "An anlysis of the viscous behavior of polymeric solutions," *Can. J. Chem. Eng.* **57** (1979) 135-140.
- [17] Shen, J. and Li, X., "Instability of an annular viscous liquid jet," *Acta Mechanica*, **114**, 167 (1996).
- [18] Shkadov, V. Ya. and Sisoiev, G. M., "Instability of a two-layer capillary jet," *Int. J. Multiphase Flow*, **22**, 363 (1996).
- [19] Chauhan, A. , Maldarelli, C. , Rumschitzki, D. S. and Papageorgiou, D. T., "Temporal and spatial instability of an inviscid compound jet," *Rehol Acta*, **35**, 567 (1996).
- [20] Huerre, P. and Monkewitz, P. A., "Local and global instability in spatially developing flows," *Ann. Rev. Fluid Mech.* **22**, 473 (1990).